Ecole polytechnique - Ecoles Normales Supérieures

Concours d'Admission 2013 XLC Filière MP

Composition de Mathématiques 1^{er} Avril 2013

1 Séries entières et propriétés additives

Notations, thème du problème. Soit A une partie de $\mathbf{N}$. On note f_A ou encore $A(z)$ la (fonction) série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = 1$ si $n \in A$ et 0 sinon, c'est-à-dire la série entière $\sum_{a \in A} z^a$. L'objectif du problème est de déduire de l'étude de f_A diverses propriétés additives de A, et notamment le théorème prouvé dans la section 4. Les exemples 1.1, 1.2 et 2.3 ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

1.1

a) Prouver que est f_A un polynôme ssi A est fini. Quel est le rayon de convergence de f_A ?
b) Soit B une partie de $\mathbf{N}$. Que représente la série entière donnée par le produit $f_A.f_B$?

1.2 Un premier exemple : des dés étranges

a) Calculer le polynôme $P(z) = (z+z^2+\cdots+z^6)^2$ et donner sa décomposition en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbf{Q}[X]$.
b) Trouver deux suites croissantes d'entiers ≥ 1, soit $a_1, \ldots, a_6$ et $b_1, \ldots, b_6$ avec $a_6 = 8$ telles que $P(z) = (z^{a_1} + \cdots + z^{a_6})(z^{b_1} + \cdots + z^{b_6})$.
c) Réaliser deux dés à six faces dont les faces sont numérotées de sorte que le calcul de la somme des chiffres de deux faces donne les mêmes résultat que celui de la somme des chiffres de deux dés ordinaires, avec les mêmes probabilités.

1.3 Un deuxième exemple : réunion de suites arithmétiques

Soient $a_1, \ldots, a_p$ des nombres entiers ≥ 2 deux à deux distincts, $b_1, \ldots, b_p$ des entiers naturels.
a) Calculer $f = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=1}^{p} z^{a_k n + b_k})$ lorsque $|z| < 1$ et montrer que f

possède un pôle non réel.
b) Montrer que $\mathbf{N}$ ne peut être réunion disjointe de suites arithmétiques de raisons entières ≥ 2 et deux à deux distinctes.

2 Représentation d'un entier comme somme de deux éléments d'une partie de N

Soit $\mathcal{A}$ une partie infinie de $\mathbf{N}$. Lorsque $n \in \mathbf{N}$, on note $\rho(n)$ le nombre de couples $(a, a') \in \mathcal{A}^2$ tels que $a + a' = n$, $\rho^+(n)$ le nombre de couples $(a, a') \in \mathcal{A}^2$ tels que $a + a' = n$ et $a \leq a'$, $\rho^-(n)$ le nombre de couples $(a, a') \in \mathcal{A}^2$ tels que $a + a' = n$ et $a < a'$.

2.1

a) Donner le rayon de convergence R de de $\sum \rho(n) z^n$, comparer $A^2(z)$ et $\sum \rho(n) z^n$, exprimer $\sum \rho^+(n) z^n$ et $\sum \rho^-(n) z^n$ en fonction de $A^2(z)$ et $A(z^2)$.
b) Montrer qu'il est impossible que $\rho^+(n)$ soit constant à partir d'un certain rang.

2.2

On se donne une partition de $\mathbf{N}$ en deux parties A et B de $\mathbf{N}$ telle que : (*) $0 \in A$, le nombre de représentations d'un entier $n \in \mathbf{N}$ comme somme de deux élément distincts de A ou comme somme de deux éléments distincts de B est toujours le même. Soit z un nombre complexe de module < 1.
a) Calculer $A(z) + B(z)$.
b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$A(z) - B(z) = (1 - z)(1 - z^2) \cdots (1 - z^{2^{n-1}})(A(z^{2^n}) - B(z^{2^n}))$$

et en déduire $A(z) - B(z)$.
c) Montrer que $P_n(z) = (1 - z)(1 - z^2) \cdots (1 - z^{2^{n-1}})$ converge, pour $|z| < 1$, vers la somme de la série entière $\sum \varepsilon(n) z^n$ où $\varepsilon(n) = 1$ si le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n est pair, et $\varepsilon(n) = -1$ sinon.
c) Déterminer A et B. Montrer que A et B vérifient la propriété (*) assumée au départ.

2.3 De nouvelles identités.

Soit A une partie infinie de $\mathbf{N}$, on désigne par $\mu(n)$ le nombre $\frac{\sum_{k=0}^{n} \rho(n)}{n+1}$
Donner le rayon de convergence R de $\sum (n+1) \mu(n) z^n$. et pour $|z| < R$, calculer en fonction de A la somme de $\sum (n+1) \mu(n) z^n$.

On se propose de prouver qu'une estimation $\mu(n) = C + O(\frac{1}{n^a})$ avec $a > 3/4$ impose $C = 0$, ce résultat constitue le théorème d'Erdös-Fuchs. On suppose donc désormais - en vue d'aboutir à une contradiction - que

$$\rho(0) + \rho(1) + \cdots + \rho(n) = C(n+1) + a_n$$

avec $C > 0$, $a_n = O(n^\alpha)$ et $\alpha < 1/4$. Dans tout ce qui suit, r est un nombre réel appartenant à $[0, 1[$.

3 Trois questions préliminaires indépendantes

3.1

a) Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$ de parties réelles et imaginaires x et y respectivement. On suppose que x et y gardent un signe constant. Montrer que $\int_a^b |f| \leq 2|\int_a^b f(t)dt|$.

b) Pour $r \in]0, 1[$, on note $J(r) = \int_0^\pi \frac{1}{1-re^{-i\theta}} d\theta$ et $I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|} d\theta$. Montrer que $|J(r)| \leq \pi + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}$ et en déduire $I(r) = O(\ln(\frac{1}{1-r^2}))$ lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures.

3.2

Soient $F(z) = \sum u_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et $r \in]0, 1[$.
a) Calculer, pour $n \in \mathbf{N}$, $\int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{n} u_k r^k e^{ikt}|^2 dt$ et en déduire $\int_0^{2\pi} |\sum_{k=0}^{+\infty} u_k r^k e^{ikt}|^2 dt$.

b) Montrer, si les coefficients u_n sont dans $\mathbf{N}$, que $\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta \geq 2\pi F(r^2)$.

3.3

Soit $\sum v_n z^n$ une série entière telle que $v_n = O(n^b)$, $0 < b \leq 1$. Montrer que, au voisinage de $1-$ dans $\mathbf{R}$, $\sum v_n r^n = O(\frac{1}{(1-r)^{b+1}})$.

4 Preuve du théorème d'Erdös-Fuchs

4.1 Régularisation

a) Exprimer A^2 en fonction de C et des nombres a_n. Vérifier qu'il existe $C' > 0$ telle que, pour r proche de 1, $r < 1$, $A(r^2) > \frac{C'}{\sqrt{1-r^2}}$.

b) On suppose dans tout ce qui suit que r et N sont choisis de sorte que $\frac{1}{1-r^2} \geq N \geq 2$. Montrer qu'il existe une constante $C" > 0$ telle que, pour r

proche de 1, $r < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(re^{it})A(re^{it})|^2 dt \geq \frac{C"N}{\sqrt{1-r^2}}.$$

c) Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Lorsque z est un nombre complexe on note $S(z)$ la somme $1 + z + \cdots + z^{N-1}$. Montrer que, pour tout $r \in]0,1[$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(re^{it})A(re^{it})|^2 dt \leq CN^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|} d\theta + 2 \int_{-\pi}^{\pi} |S(re^{it}) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n| dt.$$

4.2 Estimations finales

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour r proche de 1, $r < 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(re^{it}) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n| dt \leq \frac{M\sqrt{N}}{(1-r^2)^{\alpha+1/2}}.$$

b) En choisissant r de sorte que $N\sqrt{1-r^2} = \frac{1}{\sqrt{N}(1-r^2)^{\alpha}}$, aboutir à la contradiction souhaitée.

"But why James, why" ? "For fun, William, just for fun..."

1.1 a) ($\Rightarrow$) est clair, le sens inverse provient de l'unicité du développement en série entière ; noter que le rayon de f_A est $\geqslant 1$. Plus précisément, $\rho(f_A)$ vaut 1 si A est infini ($\sum |z|^n$ converge) et $+\infty$ si A est fini.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z|<1$. La convergence absolue des séries $f_A(z)$ et $f_B(z)$ nous autorise à en faire le produit de Cauchy : $f_A(z) \cdot f_B(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{a+b=m \\ (a,b)\in A\times B}} z^m \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m z^m$

où c_m est le nombre de façon d'obtenir m comme somme d'un élément de A et d'un élément de B.

1.2 a) On décompose bien sûr $z+\dots+z^6 = P(z)$:

$$P(z) = z(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5) = z\cdot\frac{1-z^6}{1-z} = z\frac{(1-z^3)}{1-z}(1+z^3)$$

soit $P(z) = z(1+z)(1+z+z^2)(1-z+z^2)$

les deux derniers facteurs étant irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ car de degré deux et sans racine, ceci donne immédiatement la décomposition de $P^2(z)$.

Calcul explicite :

$$P^2(z) = z^2+2z^3+3z^4+2z^5+\dots+3z^{10}+2z^{11}+z^{12}$$

1-2-b) Comme : $a_i \geqslant 1$, $b_i \geqslant 1$, z doit figurer dans les deux. De plus, les facteurs irréductibles de $A(z) = \sum_1^6 z^{a_i}$ et $B(z) = \sum_1^n b_i$ doivent être ceux de $P^2(z)$, soit,

$$A(z)B(z) = z^2(1+z)^2(1+z+z^2)^2(1-z+z^2)^2$$

Ayant isolé z, nous devons obtenir un degré 7 pour A : nécessairement $1+z \mid A$; de même $\deg B(z)/z = 3$ donc $(1+z) \mid B$.

Reste soit : $B(z) = z(1+z)(1-z+z^2)$, mais $B(1)=6$, non !

donc $B(z) = z(1+z)(1+z+z^2) = z+2z^2+2z^3+z^4$

$$A(z) = z(1+z)(1+z+z^2)(1-z+z^2)^2 = z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^8$$

1-2-c) Avec 1.1 et la décomposition précédente on donne les numéros : 1, 3, 4, 5, 6, 8 au premier dé et 1, 2, 2, 3, 3, 4 au second.

1.3 a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|<1$ il vient,

$\sum_{n\geq 1} |z|^{na}$ converge pour $a \in \mathbb{N}^*$ et, correctement ;

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} z^{a_k n+b_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} z^{b_k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n a_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{b_k}}{1-z^{a_k}}.$$

Il s'agit d'une série entière, donc les pôles sont inclus dans $\Pi = \bigcup_{k=1,\dots,p} U_{a_k}$ (U_a étant le groupe des racines a-ième de l'unité). Soit $u \in \mathbb{C}\setminus \overline{\Pi}$, il vient pour $l \geq 1$ et $\omega \in P$

$$\frac{1}{(u+h-\omega)^l} = \frac{(-1)^l}{((u+\omega)-h)^l} = \frac{(-1)^l}{(u-\omega)^l}\cdot\left(1-\frac{h}{u-\omega}\right)^{-l}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+l-1}{l-1}\frac{(-1)^l}{(u-\omega)^{n+l}}\cdot h^n$$

selon le développement usuel des fractions rationnelles (savoir refaire)

b) Supposons : $a_1 < \dots < a_p$ et soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{a_p}}$, il est clair que ω n'est pôle d'aucune des fractions rationnelles $\frac{z^{b_k}}{1-z^{a_k}}$ pour $k=1,\dots,p-1$, donc ω est pôle de f, alors que $\omega \neq 1$.

Si $\mathbb{N} = \bigcup_{\substack{k=1,\dots,p \\ n\geq 0}} \{a_k n+b_k\}$ (partition) il vient en sommant pour $|z|<1$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n = f(z)$, or $\frac{1}{1-z}$ n'a pas ω pour pôle : c'est absurde.

II

Notons que $\rho(n) = \rho^+(n) + \rho^-(n)$ (y réfléchir !)

2.1 a) • il est clair que $\sum \rho(n)$ diverge donc $R \leq 1$. D'autre part, si $|z|$ du fait que $0 \leq \rho(n) \leq n+1$, la série $\sum (n+1) z^n$ converge (vers $\frac{1}{(1-z)^2}$) donc $R=1$. On pouvait user du fait que, pour $|z|<1$, $\sum \rho(n) z^n = A^2(z)$ cf. 1.1.

•• On a, $|z|<1$ $2A(z^2) = \sum_{a\in A} 2 \cdot z^{2a} = \sum_{(a,a)\in A^2} (1+1) z^{2a}$ donc l'égalité

$$\rho^-(n) = \frac{1}{2}\rho(n) - |\{a\in A \mid a+a=n\}|$$ ainsi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho^-(n) z^n = \frac{1}{2}\left[A^2(z) - A(z^2)\right]$$

De la même façon $\sum_{n\in\mathbb{N}} \rho^+(n) z^n = \frac{1}{2}\left[A^2(z) + A(z^2)\right]$

b) Supposons : $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \rho^+(n) = C$ (>0 car A est infini), il vient alors :

$$\frac{1}{2}\left[A^2(z) + A(z^2)\right] = \sum_{n\geq 0} \rho^+(n) z^n = P(z) + C\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n}_{1/1-z}$$

où P est un polynôme.

|| Etudions la limite des deux membres lorsque z tend vers -1 :

i) Le membre de droite est borné

ii) Le membre de gauche est constitué de : $A^2(z) \geq 0$;

$A(z^2) = \sum_{a\in A} z^{2a}$ qui tend vers $+\infty$ en -1^+, car $z^2 \to 1$!

__Bref__ le membre de gauche n'est pas borné en -1^+, contradiction.

2-2 Il est clair que A et B sont infinies (sinon ...)

a) Comme $\mathbb{N} = A\cup B$ (réunion disjointe)

$$A(z) + B(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

b) On commence par $n=1$, il s'agit de vérifier que

$$A(z) - B(z) = (1-z)\left[A(z^2) - B(z^2)\right]$$

Compte-tenu des calculs précédents, l'hypothèse sur $A+A$ et $B+B$ se traduit par :

$$A^2(z) - A(z^2) = B^2(z) - B(z^2)$$

donc $(A(z) - B(z))(A(z) + B(z)) = A(z^2) - B(z^2)$

avec a) $A(z) - B(z) = (1-z)(A(z^2) - B(z^2))$

Substituons z^2 à z : $A(z^2) - B(z^2) = (1-z^2)(A(z^4) - B(z^4))$ etc..

La récurrence est alors immédiate.

2.3 Les séries $\sum \rho(n) z^n$ et $\sum z^n$ étant absolument convergentes sur $D(0,1)$, on peut effectuer leur produit de convolution et obtenir : $\frac{1}{1-z} A^2(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \rho(m) z^m\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\Gamma(n) z^n$.

III Trois questions préliminaires indépendantes

3-1-a) On observe simplement que $\left|\int_a^b x\right| = \int_a^b |x|$ et $\left|\int_a^b y\right| = \int_a^b |y|$ d'où $\int_a^b |f| = \int_a^b (x^2+y^2)^{1/2} \leq \int_a^b (|x|+|y|) = \left|\int_a^b x\right| + \left|\int_a^b y\right| \leq 2\left|\int_a^b f\right|$

b) Comme $r \in [0,1[$, la série $\sum r e^{-in\theta}$ converge normalement sur le segment $[0,\pi]$, et de ce fait

$$|J(r)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi r e^{-in\theta} d\theta\right| \leq \pi + \sum_{n=}^{+\infty} 2 \cdot \frac{r^{2n+1}}{2n+1} \leq \pi + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}.$$

Soit : $|J(r)| \leq \pi + 2\ln\frac{1}{1-r}$.

On observe alors que $\frac{1}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-re^{i\theta}}{(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} = \frac{(1-r\cos\theta)+ir\sin\theta}{(\;=\;)}$ vérifie les hypothèses du a) :

$2|J(r)| \geq \int_0^\pi \frac{d\theta}{|1-re^{-i\theta}|}$; en agissant de même sur $[-\pi,0]$:

$I(r) \leq 2\cdot 2\left(\pi + 2\ln\frac{1}{1-r}\right) = O\left(\ln\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right)$ et le résultat vient car $\ln\frac{1}{1-r^2} \underset{1^-}{\sim} \ln\frac{1}{1-r}$.

3.2 a) Un calcul usuel donne $\int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ikt}\right|^2 dt = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}$

On observe maintenant que $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} u_k r^k e^{ikt}$ converge uniformément vers $F(re^{i\theta})$ sur $[0,2\pi]$, ces suites et fonction étant uniformément bornées par M donc

$\left\| |F_r|^2 - |S_n|^2 \right\|_\infty \leq M \left\| |F_r| - |S_n| \right\|_\infty \leq M \| F_r - S_n \|_\infty$ sur $[0,2\pi]$ et de ce fait $\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2 r^{2k}$

b) Comme $u_n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq u_n$ et donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 r^{2n} \geq 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} u_n r^{2n}$$

$$\geq 2\pi F(r^2)$$

3.3 Dévelloppons $(1-r)^{-b-1}$ pour $r \in [0,1[$:

$$(1-r)^{-b-1} \underset{\text{Abel}}{=} 1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b+1)\cdots(b+n)}{n!} r^n .$$

Or : $u_n = \frac{(b+1)\cdots(b+n)}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{b}{k}\right)$ a pour Log :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\left(1+\frac{b}{k}\right) = b\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \sum_1^n O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= b \log n + c_n \text{ où } c_n \text{ converge. (vers } C')$$

De ce fait, $u_n \sim e^{C'} \cdot n^b$, on prouve alors usuellement que $\sum_0^{+\infty} n^b r^n \underset{1^-}{\sim} (1-r)^{-b-1} \cdot L$ $(L = e^{C'})$, donc

$\sum_0^{+\infty} n^b r^n \underset{1^-}{=} O\left(\frac{1}{(1-r)^{b+1}}\right)$; il existe aussi $N \geqslant 1$ et $M > 0$

tels que : $\forall n \geqslant N$, $|v_n| \leq M n^b$ de là,

$\forall r \in [0,1[$, $\left|\sum_N^{+\infty} v_n r^n\right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} n^b r^n$ et comme le membre de droite tend vers $+\infty$, $\sum_0^{+\infty} v_n r^n = O\left(\frac{1}{(1-r)^{b+1}}\right)$

IV Le théorème d'Erdös - Fuchs

4.1 Régularisation.

a) Le calcul fait en 3.1 amène ; pour $|z|<1$

$$\frac{1}{1-z} A^2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c(n+1) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

$$= \frac{c}{(1-z)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ soit,}$$

$$A^2(z) = \frac{c}{1-z} + (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Pour $r \in [0,1[$, 3.3 et le fait que $a_n = O(n^{\frac{1}{4}})$ donnent :

$$(1-r) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n = O\left(\frac{1-r}{(1-r)^{1/4+1}}\right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1/4}}\right)$$

donc $|A^2(r)| \underset{1^-}{\sim} \frac{|c|}{|1-r|}$, puis $|A(r)| \underset{1^-}{\sim} \frac{\sqrt{|c|}}{\sqrt{1-r}}$ et

$\underbrace{A(r^2)}_{\geqslant 0} \sim \frac{\sqrt{|c|}}{\sqrt{1-r^2}}$, le résultat est alors clair.

b) Utilisons le calcul de A^2 fait ci-avant :

$$A^2(z) = \frac{C}{1-z} + (1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad |z|<1$$

il vient :

le miracle

$$A^2(z)S^2(z) = \frac{C S^2(z)}{1-z} + (1-z^{N+1}) \cdot S(z) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$$

et donc, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, r étant fixé dans $[0,1[$:

$$|S(re^{it})A(re^{it})|^2 \leq \frac{CN^2}{|1-re^{-it}|} + 2|S(re^{it})|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (re^{it})^n\right|$$

et il ne reste plus qu'à intégrer.

c) Notons $F(z) = S(z)A(z)$, c'est une FSE de rayon 1 à coefficients dans $\mathbb{N}$, donc 3.2 assure,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^2 dt \geq 2\pi F(r^2), \text{ or :}$$

$$F(r^2) = (1+r^2+\dots+r^{2(N-1)})\, A(r^2) \text{ et le choix de } r, N$$

fait que : $r^2 \geq 1-\frac{1}{N}$, $r^{2k} \geq \left(1-\frac{1}{N}\right)^k \geq \frac{1}{4}$ (•) $(N\geq 2)$

il vient donc : $F(r^2) \geq \frac{N}{4} A(r^2)$ et :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{it})|^2 \geq 2\pi \cdot \frac{N}{4} F(r^2) \geq \frac{\pi N \cdot C'}{2\sqrt{1-r^2}}$$

r proche de 1^-

(•) $\left(1-\frac{1}{N}\right)^k \geq \left(1-\frac{1}{N}\right)^N$ et $\left(1-\frac{1}{N}\right)^N$ croît vers $\frac{1}{e}$.

4.2 Les meilleures choses ont une fin.

a) On utilise enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S(re^{it})|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}\right| dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cdot|^2\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\cdot|^2\right)^{1/2}$$

$$\underset{3.2}{\leq} 2\pi \cdot \sqrt{N}\left(\sum |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}$$

donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(re^{it})|\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}\right| dt \leq 2\pi\sqrt{N} \cdot O\left(\sum_0^{+\infty} n^{2\alpha} r^{2n}\right)^{1/2}$$

$$\leq 2\pi\sqrt{N}\, O\left(\frac{1}{(1-r^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\right)$$

Le résultat est alors clair.

a.2.b) Noter que $N\sqrt{1-r^2} = \dfrac{1}{\sqrt{N}(1-r^2)^{\alpha}}$ donne

$$N = \frac{1}{(1-r^2)^{\beta}}, \quad \text{avec } \beta = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} < \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} < 1$$

cette dernière contrainte est donc compatible avec $N \leq \dfrac{1}{1-r^2}$.

Réunissons nos résultats : $I(r) = O\left(\log \dfrac{1}{1-r^2}\right)$, il existe donc $C''' > 0$ telle que, pour r proche de 1^- :

$$\frac{C''N}{\sqrt{1-r^2}} \leq C''' . N^2 . \log \frac{1}{1-r^2} + \frac{2M\sqrt{N}}{(1-r^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

soit :

$$\frac{C''}{M} \leq \frac{C'''}{M} N\sqrt{1-r^2}\log\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + \frac{2M}{\sqrt{N}(1-r^2)^{\alpha}}$$

avec $\quad N\sqrt{1-r^2} = (1-r^2)^{\frac{1}{2}-\beta}$ et $\frac{1}{2}-\beta > 0 \quad \left(\alpha < \frac{1}{4}\right)$

$\quad \sqrt{N}(1-r^2)^{\alpha} = (1-r^2)^{\alpha-\beta}$ et $\alpha - \beta < 0 \quad \left(\alpha < \frac{1}{4}\right)$

Le membre de droite tend vers 0, contradiction et résultat.